

# LP : Gravitation

Elio Thellier

07/01/2021



Figure 1: Dans le corps de la leçon, en **bleu** des liens clickables vers les ressources numériques (vidéo, simulation...) et en **magenta** là où correspond une slide powerpoint.

---

## 1 Objectifs pédagogiques de la LP

- Être capable de citer et exploiter les caractéristiques de la force de Gravitation (centrale, conservative  $\Rightarrow$  mvt plan, loi des aires, le travail est nul sur une trajectoire fermée, conservation de l'énergie mécanique)
- Résoudre des problèmes classiques par différentes approches (trajectoire PFD, bilan énergétique, théorème de gauss gravitationnel)

## 2 Objectifs et messages forts de la LP (disciplinaire)

- Tout d'abord reposer les bases d'une force que l'on utilise depuis toujours sans jamais lui prêter réellement d'attention.
- Élargir sa maîtrise de la gravitation en utilisant un parallèle avec des lois connues de l'électrostatique.
- Mettre en oeuvre ce qui vient d'être vu sur des exemples concrets qui suscitent également la curiosité.

## 3 Introduction générale de la leçon

Aussi vaste que soit la physique dans son ensemble, on ne dénombre à ce jour que 4 forces fondamentales, qui influent chacune à des échelles distinctes. Les interactions faibles et fortes dans le sub atomique, l'électrostatique du niveau atomique au macroscopique, et la gravitation aux (très) grandes échelles. C'est pourquoi cette leçon sera ponctuée d'exemples issus de l'astrophysique. Nous verrons entre autre la trajectoire d'une planète, le phénomène de marée sur les amas globulaires, la vitesse nécessaire pour lancer un satellite, et l'effondrement d'une étoile en fin de vie. Mais commençons par le commencement, avec la découverte historique de Newton ... La **gravitation de Newton (1687)** c'est faire le lien entre la chute des objets sur Terre et le mouvement des objets célestes. Le "mouvement naturel" n'est pas le cercle mais la ligne droite, donc il décompose le mouvement de la lune avec la tangente et remarque que le morceaux manquant c'est une chute à la manière d'un objet sur Terre.

## 4 Proposition de plan pour "La Gravitation"

### 4.1 Les Fondamentaux

#### 4.1.1 Définition de la force de gravité.

- Expression pour  $m_1$  au point A et  $m_2$  au point B :  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{Gm_1m_2\vec{AB}}{AB^3}$ , [expérience de Cavendish \(1798\)](#) pour mesurer G.

On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen

**Système** : les deux petites masses  $m$ , et leur axe de masse négligeable et le longueur  $2L$

Bilan des actions :  $\vec{F}_{torsion} = -C\theta\vec{e}_\theta$ , et  $\vec{F}_{grav} = 2G\frac{Mm}{d^2}\vec{e}_\theta$  car il y a deux masses  $m$  et deux masses  $M$

TMC :  $\frac{d\vec{L}}{dt} = (2G\frac{Mm}{d^2}L - C\theta L)\vec{e}_z = \vec{0}$  à l'équilibre. La seule inconnue est G lorsqu'on mesure  $\theta$ .

ODG :  $G_{Cavendish} = 6,754.10^{-11}N.m^2.kg^{-2}$  alors qu'aujourd'hui on a  $G = 6,674.10^{-11}N.m^2.kg^{-2}$

- **Force conservative** : Il existe  $E_p$  telle que  $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$ , en l'occurrence  $E_p = \frac{-Gm_1m_2}{AB^2}$ . Conséquence : le travail ne dépend pas du chemin suivi, le travail sur une trajectoire fermée est nul, conservation de  $E_m$ .
- **Force centrale** :  $\vec{L} = \overrightarrow{cste}$ , Donc mouvement plan :  $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \vec{r}$  et  $\vec{v} \in P_{\perp\vec{L}}$  M reste donc dans ce plan. On verra aussi que ça engendre la loi des aires de Kepler. *Transition vers les 3 lois de Kepler.*

#### 4.1.2 Les 3 lois de Kepler

- **Première loi de Kepler** : "Les trajectoires des planètes dans le système solaire sont **des ellipses dont le soleil occupe un foyer.**" Peut être généralisé à "Dans un problème à deux corps dont l'un (en O) est immobile ( $M \gg m$ ), la trajectoire du corps mobile (en M) est une conique dont un foyer est le barycentre du système.

- Seconde loi de Kepler : "L'aire balayée par le segment OM en une durée t ne dépend pas de la position sur la trajectoire". [Animation](#) puis [slide avec schéma pour la démonstration](#).

Pendant  $dt$  le point M parcourt  $r d\theta dt$ , l'aire balayée est donc  $dA = \frac{r^2 d\theta dt}{2}$  d'où  $\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2}$  or  $L = mr^2 \dot{\theta} = cte$  donc  $\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = cte.}$

- Troisième loi de Kepler : "Tous les objets gravitant autour d'une étoile \* à une distance a et en une période T vérifient  $\frac{T^2}{a^3} = cste_*$ . On peut le démontrer dans le cas particulier de la trajectoire circulaire de rayon r ([schéma](#)) :

Système : Objet de masse m gravitant autour de la masse M supposée fixe.

Référentiel : tournant lié à M, repère de Frenet (donc  $\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta$ )

Bilan des actions :  $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$

PFD projeté sur  $\vec{e}_r$  :  $-m \frac{v^2}{r} = -\frac{GMm}{r^2}$  or  $v = r\dot{\theta}$  d'où  $\dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$  Finalement  $\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$

### 4.1.3 Approche énergétique.

On se place encore dans le cas où  $M \gg m$  donc on considère M immobile. On étudie la trajectoire de m par une approche énergétique.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{GMm}{r}$$

$$\text{Or } \vec{L} = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = cste \text{ donc } \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}$$

$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r}$  On a exprimé l'énergie mécanique en fonction d'un seul paramètre. On a d'une part l'énergie cinétique radiale, et d'autre part une énergie potentielle effective dont on va étudier [le graphe](#).

**Transition didactique:** Jusque là on a réduit les objets massiques à un point. On devrait vérifier que l'on a bien le droit, et on voudrait aussi pouvoir traiter des problèmes où la distribution de masse n'est pas simplement ponctuelle. Nous allons voir qu'un parallèle avec l'électrostatique nous apporte les outils nécessaires pour répondre à ces questions.

## 4.2 Parallèle avec l'électrostatique.

### 4.2.1 Comparaison électrostatique ↔ gravitation

Electrostatique	Gravitation
$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AB}}{AB^3}$	$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -Gm_1 m_2 \frac{\vec{AB}}{AB^3}$
$\vec{E}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AB}}{AB^3}$	$\vec{g}_{1 \rightarrow 2} = -Gm_1 \frac{\vec{AB}}{AB^3}$
$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$	$-Gm$

### 4.2.2 Théorème de Gauss

**Rappel :**  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  avec  $d\vec{S}$  orientée vers l'extérieur, et  $Q_{int}$  la charge à l'intérieur de la surface fermée d'intégration.

Avec le parallèle établi précédemment on obtient :

$$\boxed{\text{Théorème de Gauss gravitationnel : } \oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}}$$

De même que pour l'électrostatique, un plan de symétrie pour la distribution de masse est un plan de symétrie pour  $\vec{g}$

### 4.2.3 Limite de la comparaison

- La force de gravité est toujours attractive, il n'existe a priori pas de masses négatives. Toutefois l'expérience de la chute libre d'antimatière (vers "le haut" ??) est en train d'être mise en place au CERN par le groupe Alpha-g. (On peut trouver un parallèle de masse négative dans des expériences de TP.)

- Dans la théorie de la gravitation de Newton il n'y pas d'équivalent pour  $\vec{g}$  de ce que  $\vec{B}$  est à  $\vec{E}$ .

**Transition didactique :** entre l'étude préliminaire, l'approche énergétique et la comparaison avec l'électrostatique nous avons acquis des outils de résolution que nous allons désormais mettre en oeuvre.

## 4.3 Applications

### 4.3.1 Phénomène de marée

**shéma amas globulaire et centre de la galaxie.** Tout le calcul est comme dans le cahier ci dessous mais remplacer le soleil par le centre de la galaxie et la terre par un amas globulaire. Ajouter à la fin une condition sur le rayon maximum de l'amas pour assurer sa cohésion.

variation du plan d'oscillation pendant une période d'oscillation ( $l=19m$ )

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 8,5s$$

$$|\theta_1(T_0)| = |5\pi \sin(\lambda) T| = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 3,5'$$

2 tours au complet en  $\frac{1 \text{ jour}}{\sin(\lambda)} = 34h$

7 - Les marées

Soit  $M$  (de masse  $m$ ) un point à la surface de la Terre.  
 On travaille dans le référentiel géocentrique (en translation p/a au ref de Copernic).

Bilan des interactions.

- $\vec{F}_{\text{sol}}$  (dont réaction du sol)
- attraction gravitationnelle de la Terre  $= m \vec{G}_T(M)$
- attraction gravitationnelle de la Lune  $= m \vec{G}_L(M)$

- attraction gravitationnelle de la Lune  $m \vec{G}_S(M)$
- autres planètes  $m \vec{G}_P(M)$
- $\vec{f}_{a\vec{e}} = -m \vec{a}_{\vec{e}}(M)$
- $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$

On applique le PFD

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + m \vec{G}_T(M) + m (\vec{G}_L(M) + \vec{G}_S(M) + \dots) - m \vec{a}_{\vec{e}}(M)$$

Le référentiel géocentrique est en translation p/r au référentiel de Copernic (galiléen)  $\vec{a}_{\vec{e}}(M) = \vec{a}'(CT)$

↑ barycentre de la Terre.

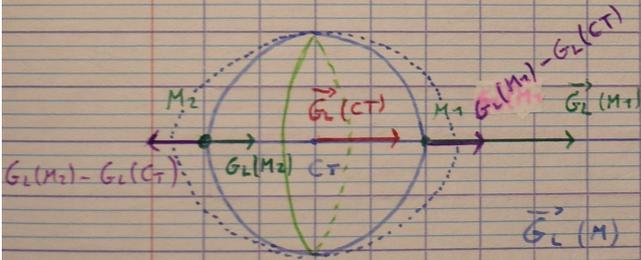
Pour calculer  $\vec{a}'(CT)$  on applique le TRC à la Terre dans le référentiel de Copernic

$$M_T \vec{a}'(CT) = M_T \vec{G}_L(CT) + M_T \vec{G}_S'(CT) + \dots$$

On injecte dans le PFD

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + m \vec{G}_T(M) + m \underbrace{[\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(CT) + \vec{G}_S(M) - \vec{G}_S(CT) + \dots]}_{\text{terme de marée}}$$

Thème pour le terme différentiel dû à la lune



$$\vec{G}_L(M) = \sum \frac{M_L}{(C_L M)^2} \vec{M C_L}$$

déformation de la surface

Calcul approché de  $G_L(M_1) - G_L(CT) = \left[ \sum \frac{M_L}{(D_{TL} - R_T)^2} - \sum \frac{M_L}{D_{TL}^2} \right] \vec{u}$

$$= \sum \frac{M_L}{D_{TL}^2} \left( \left( 1 - \frac{R_T}{D_{TL}} \right)^{-2} - 1 \right) \vec{u} \quad D_{TL} \gg R_T \quad 384\,000 \text{ km} \gg 6\,400 \text{ km}$$

$$\stackrel{DL}{=} 2 \sum \frac{M_L R_T}{D_{TL}^3} \quad \left( 1 - \frac{R_T}{D_{TL}} \right)^{-2} \approx \frac{1}{1-x} \approx (1+x+0(x)^2) = 1 + 2\frac{R_T}{D_{TL}} + \frac{R_T^2}{D_{TL}^2} \quad \text{car } x = \frac{R_T}{D_{TL}}$$

• Lune :  $2 \sum \frac{M_L R_T}{D_{TL}^3} = 7,7 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

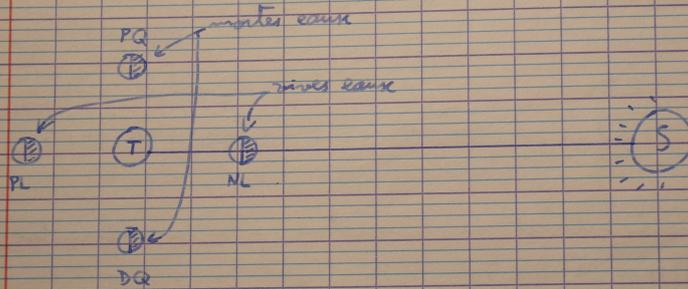
• Soleil :  $2 \sum \frac{M_S R_T}{D_{TS}^3} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$M_L = 7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

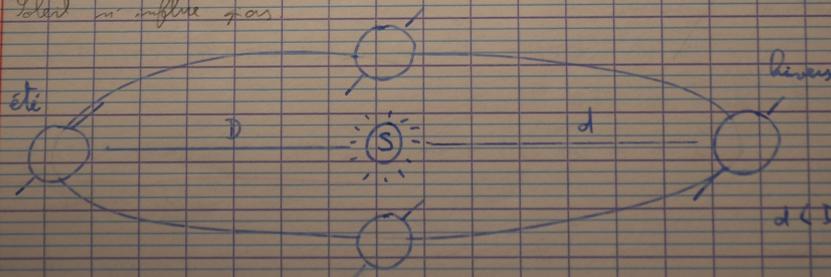
$$E_g = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$$

$$M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

schéma simplifié on considère que la lune tourne autour de la Terre dans le plan de l'écliptique.



au cours de l'hiver, cette année le jour le plus froid sera quand on sera le plus proche du soleil, seule l'inclinaison compte été/hiver, la distance au soleil n'influe pas



### Animation 1 et Animation 2

Remarque : il y a aussi des marées telluriques moins visibles mais bien présentes, qui induisent beaucoup de frottement ce qui explique que le jour est plus long aujourd'hui qu'il y a 10 000 ans. C'est également ce freinage de la rotation par les marées telluriques qui explique que la lune ne nous montre qu'une face.

### 4.3.2 Effondrement d'une étoile en fin de vie

On assimile une étoile à une **sphère de rayon  $R$ , de fluide de densité  $\rho$  homogène**, à l'équilibre hydrostatique ( $\vec{v} = \vec{0}$ ).

Dans les coordonnées sphériques on applique l'équation d'Euler à une particule de fluide :

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \text{grad}(p) \text{ Mais que vaut } \vec{g} \text{ à l'intérieur de l'étoile ?}$$

Symétries : Tout plan contenant O est un plan de symétrie pour la distribution de masse et donc plan de symétrie pour  $\vec{g}$ . Donc  $\vec{g}(r, \theta, \phi) = g(r, \theta, \phi) \vec{e}_r$

Invariances : Il y a invariance du problème par toute rotation autour de O, donc  $g(r, \theta, \phi) = g(r)$

Surface de Gauss : Sphère de centre O et de rayon r.

Théorème de Gauss gravitationnel :

- Pour  $r < R$  :

$$g 4\pi r^2 = -4\pi G \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$\vec{g}(r) = -G \frac{4}{3} \pi r \rho \vec{e}_r$$

$$\vec{g}(r) = -G \frac{m(r)}{r^2} \vec{e}_r$$

On remarque que la partie de l'étoile entre  $r$  et  $R$  n'influence en rien,  $\vec{g}$  à l'intérieur d'une coquille vide est nul.

- Pour  $r \geq R$  :

$$g4\pi r^2 = -4\pi GM_*$$

$$\vec{g}(r) = -\frac{GM_*}{r^2} \vec{e}_r$$

Ici on remarque que l'on obtient le même champ  $\vec{g}$  que si toute la masse de l'étoile était concentrée en O ! Le théorème de Gauss gravitationnel valide les hypothèses des masses ponctuelles que l'on a utilisé depuis le début.

Reprenons l'équation d'Euler projetée sur  $\vec{e}_r$  :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{m(r)}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$$

Tant que les deux termes de droite se compensent, étoile est stable. La majorité de la pression qui la maintient provient des réactions nucléaires en son sein. Lorsque qu'elle a consommé tout son carburant nucléaire (H et He pour notre soleil qui en est à 50% de ses réserves), alors la pression chute brutalement et l'étoile s'effondre sous son propre poids. Si l'on considère qu'à cet instant le terme en pression s'annule, on peut caractériser un ODG du temps d'effondrement :

$$\frac{R}{\tau^2} = \frac{GM_*}{R^2}$$

$$\tau = \left( \frac{R_*^3}{GM_*} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$AN : \tau_{Soleil} \approx 1h$$

Ce temps d'effondrement très faible prouve que le soleil n'est pas dans un effondrement très lent, mais bien à l'équilibre hydrostatique dans sa phase de combustion.

### 4.3.3 Formation d'une binaire

Sirius A et Sirius B sont deux étoiles indiscernables depuis la terre, dans la constellation du chien. Elles tournent l'une autour de l'autre (sur une trajectoire elliptique en 50 ans environ). C'est ce qu'on appelle une binaire et on se demande ici comment une binaire se forme. Lorsque deux étoiles de masses comparables se croisent, elles peuvent soit être déviées et continuer leur route (système libre, rencontre faible), soit se mettre à tourner l'une autour de l'autre (système lié, rencontre forte). On suppose deux étoiles de même masse  $m$  cf diapo.

On fait une étude énergétique lorsqu'elles sont infiniment éloignées pour pouvoir considérer qu'elles ne se voient pas et s'affranchir des interactions mutuelles lorsqu'elles seront proche.  $E_c = \frac{1}{2}mv_*^2$ . L'énergie potentielle de l'étoile "fixe" est  $E_p = -\frac{Gm^2}{r}$ . Il y a donc formation d'une binaire si  $E_c < |E_p| = -\frac{Gm^2}{r}$

Déterminons  $R$  le rayon de la sphère d'influence de l'étoile,  $\frac{1}{2}mv_*^2 = \frac{Gm^2}{R} \Rightarrow R = \frac{2Gm}{v_*^2}$  Si la première étoile passe hors de la sphère d'influence de l'autre alors il y a simple déflexion des trajectoires, sinon il y a formation d'une binaire. Possibilité de résoudre avec une méthode type PFD dans le réf barycentrique. Introduire la seconde vitesse cosmique que l'on a en fait retrouvé ici : Vitesse de libération d'un corps quittant la Terre.  $v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$  ODG :  $11km.s^{-1}$

## 5 Conclusion et ouverture

- On a vu que la gravitation selon Newton donne une force entre tout objets possédant une masse. Cette force est centrale, conservative, et permet d'expliquer divers phénomènes naturels observables tels que les marées terrestres, ou pourquoi les étoiles n'explorent pas sous leur pression.
- On a observé en 1820 que la périhélie d'Uranus se décalait et on a prédit l'existence la masse et la position de Neptune avec brio. Pour Mercure de même on observe un décalage de la périhélie, et là, pas d'objet massique présent pour expliquer cet écart à la prédiction. La théorie de Newton est mise a défaut et c'est Einstein qui expliquera le décalage de la périhélie de Mercure grâce à sa théorie de la gravitation. La gravitation n'est plus vue comme une force mais comme une déformation de l'espace temps où la trajectoire d'un corps au repos n'est plus nécessairement une droite.

## 6 Subtilités de la leçon et points disciplinaires essentiels

- Calcul des forces de marées.
- Exploitation du diagramme en énergie.
- Parler des trajectoires sachant que les coniques ne sont pas au programme c'est un peu délicat.

## 7 Exercices de base et applications intéressantes pour la leçon

- Comète surnommée "Tchouri" à une trajectoire elliptique, une période orbitale de 6.5 ans. Toutefois, sa trajectoire change beaucoup lorsque lorsqu'elle approche de trop près un corps massique (Jupiter en 1840 transforme sa périhélie à 3UA, et Jupiter à nouveau en 1959 change sa périhélie à sa valeur actuelle : 1.28UA et période 6.45 ans). Cette comète passe dans le système solaire. L' Europe y à fait atterrir l'atterrisseur Philae le 12 novembre 2014, lancé par la sonde Rosetta.
- Point de Lagrange : Pour un système à deux masses qui tournent autour de leur barycentre, il existe 5 positions fixent dans le référentiel tournant où une tierce masse négligeable devant les deux autres reste immobile. cf cette conférence de 3:05 à 6:33
- Rayon de Schwarzschild : vitesse de libération pour un trou noir = c, pour un trou noir de masse M alors en dessous de  $R_{Schwarzschild}$  la lumière est piégée. Trou noir de Schwarzschild : masse positive, charge nulle et moment d'inertie nul (n'est pas en rotation).
- Les 3 vitesses cosmiques :  
Vitesse de satellisation minimale autour de la Terre  $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$  ODG :  $7.9 km.s^{-1}$ , pour lancer un satellite on utilise l'effet de fronde (lancement depuis la Guyane Française à latitude de  $5^\circ$ )  
Vitesse de libération du système solaire pour un corps partant de la Terre  $v = \sqrt{\frac{GM_S}{D_{T-S}}}$
- Étoile binaire : Sirius A et sirius B
- exercice classique : une sphère à répartition de masse uniforme percée d'un tunnel qui ne passe pas par le centre. On lâche une bille dans le trou qui se déplace sans (ou avec) frottements, décrire son mouvement au cours du temps (résolution proche de la partie B de l'épreuve A physique 2019, il faut d'abord calculer  $g(r)$  avec th Gauss)

## 8 Bibliographie pour construire la leçon

- Cours de sup, cours de spé et cours de M1 astro.... Si vous avez des ref bibliographiques hésitez pas à me dire je les ajouterai

## 9 Expériences illustratives, simulations numériques et exploitation pédagogique

- Vidéo EPFL sur l'expérience de Cavendish pour déterminer  $G$  en laboratoire (image 2:35 pour expliquer dispositif, puis passage de 3:07 à 3:24)
- Visualisation du système solaire, montre l'observation de Kepler pour les trajectoires elliptiques
- Illustration pour la vitesse aréolaire constante
- Trajectoires en fonction du diagramme en énergie (ellipse, cercle, parabole, hyperbole)
- Illustre l'origine de la force de marée
- "Confirme" visuellement l'influence prépondérante de la lune sur les marées

## 10 Critique des choix pédagogiques de la leçon

Les expériences avec des planètes sont dur à mettre en oeuvre dans une salle de TP, d'où "l'abondance" de simulations numériques. On pourrait toutefois mesurer  $g$  avec un pendule, où une chute libre... L'exemple du rayon maximal des amas globulaire pour les marées est vraiment nouveau et devrait faire plaisir au jury (si les calculs et tout le reste vont bien). Le plan a été beaucoup retravaillé et les exemples précisés (nom de comète, applications numériques...) suite aux commentaires du correcteur.

- BONNE PRÉPARATION -